Überlegungen zu einer allgemeingültigen Physik ohne „Kontraktion der Längen“ und „Dilatation der Zeit“

.

.

(5) Nicht-relativistische Begründung der Relativität der Trägheit
Teil 3: Ableitung der Formel der „kinetischen Gesamtmasse“ aus den kanonischen Formeln der kinetischen Energie

Zusammenfassung: Es wird aus der Gleichung $m_0 c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1) = eV$ die Formel

$E_{kin} = (\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{eVeV\sqrt{1-(v/c)^2}}{c^2 v^2 m_0})\frac{v^2}{2}$ abgeleitet, die in der runden Klammer die im 2. Teil dieses Abschnittes zur Diskussion gestellte „kinetische Gesamtmasse“ enthält.

1. Im zweiten Teil des vorliegenden fünften Abschnittes wurde die Behauptung begründet, dass es neben einer Berechnung der kinetischen Energie aus den kanonischen Formeln

$$E_{kin} = m_0 c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1) \quad \textbf{(1)}$$

und $E_{kin} = eV$ **(2)**

auch eine bei beliebiger Geschwindigkeit $v < c$ äquivalente Berechnung aus der klassischen Formel $E_{kin} = mv^2/2$ **(3)**

gibt, wenn die einzusetzende Masse als „kinetische Gesamtmasse“ mit der Formel

$$m_{\text{int}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{eVeV\sqrt{1-(v/c)^2}}{m_0 c^2 v^2} \quad \textbf{(4)}$$

berechnet wird. Mit dieser Masse lautet eine der Formeln der kinetischen Energie

$$E_{kin} = (\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{eV}{c^2} \cdot \frac{eV}{v^2} \cdot \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{m_0})\frac{v^2}{2}\,. \quad \textbf{(5)}$$

Dieser Ausdruck soll nachfolgend aus den kanonischen Formeln (1) und (2) abgeleitet werden. Ziel der Ableitung ist der Nachweis, dass die Berechnung der kinetischen Energie mit Hilfe der Formel „kinetische Energie gleich kinetische Gesamtmasse x halbes Geschwindigkeitsquadrat“ den Berechnungen mit Hilfe der kanonischen Formeln äquivalent ist.

1. 1. Mit den dem Verf. zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln hat diese Ableitung den Charakter einer schulischen Fleißarbeit, die vor allem für einen Leser von Interesse ist, der diesem Nachweis eine besondere Bedeutung bei der Beantwortung der Frage beimisst, ob die „kinetische Gesamtmasse“ mehr ist als eine Zahlenspielerei.

2. Ausgangspunkt der Ableitung ist die unstrittige Gleichsetzung $m_0 c^2 (\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1) = eV = E_{kin}$. Aus Platzgründen schreiben wir für $\sqrt{1-(v/c)^2}$ den Platzhalter $\sqrt{k}$.

2. 1. In der vereinbarten Schreibweise erhalten wir die Gleichung $m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{k}}-1)=eV$ und über $\frac{m_0c^2}{\sqrt{k}}-m_0c^2=eV$ sowie $\frac{m_0c^2}{\sqrt{k}}=eV+m_0c^2$ die Gleichung $m_0c^2=\sqrt{k}(eV+m_0c^2)$.

2. 2. Multiplikation mit eV auf beiden Seiten ergibt $m_0c^2eV=eV\sqrt{k}(eV+m_0c^2)$ und somit $eV=\frac{\sqrt{k}eV(eV+m_0c^2)}{m_0c^2}$.

Nach Auflösung der Klammer im Zähler erhalten wir $eV=\frac{eVeV\sqrt{k}+eVm_0c^2\sqrt{k}}{m_0c^2}$. Der Bruch wird bei vertauschter Reihenfolge der Summanden im Zähler in zwei gleichnamige Brüche zerlegt: $eV=\frac{eVm_0c^2\sqrt{k}}{m_0c^2}+\frac{eVeV\sqrt{k}}{m_0c^2}$.

2. 3. Da mit der abzuleitenden Formel die kinetische Energie als Produkt „kinetische Gesamtmasse x halbes Geschwindigkeitsquadrat" berechnet werden soll, wird die rechte Seite nach Klammersetzung mit $v^2/2$ multipliziert, weshalb in der Klammer die beiden Brüche zur Wahrung der mathematischen Äquivalenz mit dem Kehrwert $2/v^2$ zu multiplizieren sind: $eV=[2\frac{eVm_0c^2\sqrt{k}}{m_0c^2v^2}+2\frac{eVeV\sqrt{k}}{m_0c^2v^2}]\frac{v^2}{2}$. **(6)**

3. Wie man (6) unmittelbar entnimmt, liefert der zweite Bruch in der Klammer in kompakterer Schreibweise den doppelten Betrag jenes Summanden, der in der abzuleitenden Formel (5) jenes Massenäquivalent berechnet, das in der Summe mit der Impulsmasse die „kinetische Gesamtmasse" ergibt. Es muss folglich die Hälfte dieses Betrages an den ersten Bruch übertragen werden. Dazu wird zunächst der zweite Bruch, der bisher als Produkt mit dem Faktor 2 geschrieben wurde, als Summe von zwei identischen Brüchen geschrieben:

$$\boxed{eV=[2\frac{eVm_0c^2\sqrt{k}}{m_0c^2v^2}+\frac{eVeV\sqrt{k}}{m_0c^2v^2}+\frac{eVeV\sqrt{k}}{m_0c^2v^2}]\frac{v^2}{2}} \qquad \textbf{(7)}$$

3. 1. Der dritte der gleichnamigen Brüche in (7) hat jetzt bei etwas anderer graphischer Anordnung der Terme bereits die Gestalt, die der zweite Summand in der abzuleitenden Formel (5) haben soll. Da dieser Term zusammen mit der Impulsmasse die „kinetische Gesamtmasse" ergeben soll, bleibt zu zeigen, dass die Addition der beiden ersten Summanden in der Klammer $\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ ergibt.

3. 2. Zum Beweis dieser Annahme werden die beiden ersten Brüche in der Klammer wieder in einem Bruch zusammengefasst:

$$\boxed{eV=(\frac{2eVm_0c^2\sqrt{k}+eVeV\sqrt{k}}{m_0c^2v^2}+\frac{eVeV\sqrt{k}}{m_0c^2v^2})\frac{v^2}{2}}. \qquad \textbf{(8)}$$

4. Aus Platzgründen wird zunächst nur die Umformung des ersteren Bruches dargestellt. Zu zeigen ist, dass tatsächlich

$$\frac{2eVm_0c^2\sqrt{k}+eVeV\sqrt{k}}{m_0c^2v^2}=\frac{m_0}{\sqrt{k}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \textbf{(9)}$$

gilt. Dazu wird der Bruch auf der linken Seite zunächst durch eine Reihe von Kürzungen maximal vereinfacht.

4. 1. Da im Nenner dieses Bruches der Term v^2 enthalten ist, der im Zähler nicht vorkommt, muss er durch einen äquivalenten Ausdruck ersetzt werden, der sich herauskürzen lässt. Aus Experimenten mit beschleunigten Elektronen ist die Formel $v^2=c^2[1-(m_0/m_{imp})^2]$ bekannt. Setzt man in der runden Klammer für die Impulsmasse den üblichen Term $m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ ein, so erhält man über

$v^2=c^2[1-(\frac{m_0}{m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}})^2]$ nach Kürzung $v^2=c^2[1-(\sqrt{1-(v/c)^2})^2]$ und wegen $\sqrt{1-(v/c)^2}=\sqrt{k}$ in der oben vereinbarten Schreibweise $v^2 = c^2(1-k)$. Es kann somit zunächst geschrieben werden:

$$\frac{(2eVm_0c^2\sqrt{k}+eVeV\sqrt{k})}{m_0c^2c^2(1-k)}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,. \qquad \textbf{(10)}$$

4. 2. Da die linke Seite von (10) im Zähler noch den Term eV enthält, der im Nenner nicht vorkommt, wird dieser Term nach und nach ersetzt. Zunächst wird eV im Zähler vor die Klammer gesetzt: $\frac{eV(2m_0c^2\sqrt{k}+eV\sqrt{k})}{m_0c^2c^2(1-k)}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$. Wegen

$m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1)=eV$ und $\sqrt{1-(v/c)^2}=\sqrt{k}$ kann eV vor der Klammer und in der Klammer durch $m_0c^2(1/\sqrt{k}-1)$ ersetzt werden:

$$\frac{m_0c^2(1/\sqrt{k}-1)[2m_0c^2\sqrt{k}+m_0c^2(1/\sqrt{k}-1)\sqrt{k})]}{m_0c^2c^2(1-k)}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Nach Kürzung von m_0c^2 folgt:

$$\frac{(1/\sqrt{k}-1)[2m_0c^2\sqrt{k}+m_0c^2(1/\sqrt{k}-1)\sqrt{k})]}{c^2(1-k)}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,.$$

Im Zähler wird noch einmal m_0c^2 vor die eckige Klammer gesetzt und c^2 gekürzt:

$$\frac{m_0(1/\sqrt{k}-1)[2\sqrt{k}+(1/\sqrt{k}-1)\sqrt{k})]}{(1-k)}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,.$$

4. 3. Im Zähler wird $1/\sqrt{k}$ aus der runden Klammer vor der eckigen Klammer herausgenommen und $\frac{m_0}{\sqrt{k}}$ vor den Bruchstrich gesetzt:

$$\frac{m_0}{\sqrt{k}}\frac{(1-\sqrt{k})[2\sqrt{k}+(1/\sqrt{k}-1)\sqrt{k})]}{(1-k)}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,. \qquad \textbf{(11)}$$

5. Wie man (11) unmittelbar entnimmt, muss der große Bruch auf der linken Seite den Wert 1 haben, wenn die Gleichung stimmig sein soll. Mit anderen Worten, es muss der Zähler des großen Bruches gleich $(1-k)$ sein.

5. 1. Im Zähler des großen Bruches wird $(1-\sqrt{k})$ in die eckige Klammer hineingenommen:

$$\frac{m_0}{\sqrt{k}}\frac{[(1-\sqrt{k})2\sqrt{k}+(1-\sqrt{k})(1/\sqrt{k}-1)\sqrt{k})]}{(1-k)}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \textbf{(12)}$$

5. 2. Aus (12) folgt nach Auflösung der ersten runden KLammer

$\frac{m_0}{\sqrt{k}}\frac{[2\sqrt{k}-2k+(1/\sqrt{k}-1-1+\sqrt{k})\sqrt{k}]}{(1-k)}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ und nach Öffnung der verbliebenen runden Klammer:

$$\frac{m_0}{\sqrt{k}}\frac{[2\sqrt{k}-2k+1-\sqrt{k}-\sqrt{k}+k]}{(1-k)}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,.$$

5. 3. Addition im Zähler des großen Bruches ergibt:

$\frac{m_0}{\sqrt{k}}\frac{(1-k)}{(1-k)}$ und somit wegen $\sqrt{k}=\sqrt{1-(v/c)^2}$ schließlich $\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, was zu beweisen war.

6. Es kann somit für $\boxed{eV=(\frac{2eVm_0c^2\sqrt{k}+eVeV\sqrt{k}}{m_0c^2v^2}+\frac{eVeV\sqrt{k}}{m_0c^2v^2})\frac{v^2}{2}}$ [vgl. Formel (8)], die hier abzuleitende Gleichung (5) als Formel der kinetischen Energie geschrieben werden:

$E_{kin}=(\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}+\frac{eV}{c^2}\cdot\frac{eV}{v^2}\cdot\frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{m_0})\frac{v^2}{2}$. Im vorangehenden Teil dieses Abschnittes wurde bereits mehre äquivalente Ausdrücke für diese Formel genannt, die eV nicht enthalten und deshalb auch im makroskopischen Bereich anwendbar sind.

6. 1. In der Klammer von (5) ist der Ausdruck für die „kinetische Gesamtmasse“ enthalten, der im zweiten Teil in Abs. 5. 4 zur Diskusion gestellt wurde. Damit ist die Behauptung bewiesen, dass die Formel „kinetische Energie gleich kinetische Gesamtmasse x halbes Geschwindigkeitsquadrat“ den kanonischen Formeln rechnerisch äquivalent ist.

6. 2. Damit ist auch bewiesen, dass der im vorangehenden Teil für den Fall „ Impulsmasse gleich zwei Elektronenruhemassen“ geführte Nachweis der numerischen Korrektheit der Formel $E_{kin}=m_{\text{int}}v^2/2$ für beliebige Geschwindigkeiten $<c$ verallgemeinert werden kann, woraus auch folgt, dass die klassische Formel der

kinetischen Energie, wenn für m die hier definierte „kinetische Gesamtmasse“ eingesetzt wird, allgemeingültig ist.

6. 3. Verf. nennt diese Ableitung „nicht-relativistisch“, weil sie genau so ohne Rückgriff auf die relativistischen Raumzeitannahmen auskommt wie die Ableitung der Ausgangsformeln (1) und (2).

7. Verf. stellt die Frage zur Diskussion, ob die Tatsache, dass die klassische Formel (3) den kanonischen Formeln rechnerisch äquivalent wird, wenn die einzusetzende Masse als „kinetische Gesamtmasse“ definiert wird, als ein Beweis für die physikalische Realität der „kinetischen Gesamtmasse“ gewertet werden kann.
Da Verf. diese Frage bejaht, meint er, mit dem bisher Gesagten einen weiteren Baustein für eine allgemeingültige Physik ohne „Kontraktion der Längen“ und „Dilatation“ der Zeit und somit auch ohne die Einsteinsche „gekrümmte Raumzeit“ geliefert zu haben.

Oskar Törne
09.10.2013